Αλγεβρικές Δομές 1

18/02/2019
Δευτέρα

Πράξεις

$+$ (Ημιομάδα-μονοειδές)

$+,-$ Ομάδες

$+,-,\cdot$ Δακτύλιος

$+,-,\cdot,/$ Σώματα

$\langle 3,7\rangle \to$ $\cancel{-2}$ $\cancel{-1}$ 0 $\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ 6 7 $\cancel{8}$ 9 10 $\cancel{11}$ | 12 13 14 15 16 17

<u>Ορισμός</u>: Μια διμελή πράξη $*$ στο σύνολο S είναι μια απεικόνιση $S\times S \xrightarrow{f} S$ της μορφής $(a,b) \to f(a,b) = a*b$.

<u>Παραδείγματα</u>: $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a,b) \to a+b$ πρόσθεση

$(a,b) \to a-b$ αφαίρεση

$(a,b) \to a\cdot b$ πολλ/σμός

$(a,b) \to a/b$ διαίρεση

<u>Ορισμός</u>: <u>Ομάδα</u> $(G,*)$ είναι ένα σύνολο G μαζί με μια διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

1) Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική (Για κάθε $a,b,\gamma \in G$ ισχύει $(a*b)*\gamma = a*(b*\gamma)$.).

(ουδέτερο) 2) Υπάρχει ένα στοιχείο $l \in G$ τ.ω. $l*g = g*l = g$ για κάθε $g\in G$

3) Για κάθε $a\in G$ υπάρχει $a'\in G$ τ.ω. $a*a' = l = a'*a$. (αντίστροφο, αντίθετο)

<u>Ορισμός</u>: Μια <u>ομάδα</u> $(G,*)$ ονομάζεται <u>αβελιανή</u> αν <u>$a*b=b*a$</u> $\forall a,b\in G$

<u>Παραδείγματα Ομάδων</u>:

- Έστω $(V,K,+,\cdot)$ K-διανυσματικός χώρος τότε το $(V,+)$ είναι ομάδα (αβελιανή).

$(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{R}^{m\times n},+)$, $(C,+)$, $(\mathbb{C}^n,+)$, $(\mathbb{Z}_7,+)$, $(\mathbb{Z}_7^n,+)$.

↳ σύνολο συνεχών συναρτήσεων. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Θεώρημα: Έστω $(G,*)$ ομάδα. Ισχύει ο αριστερός και ο δεξιός νόμος διαγραφής, δηλαδή αν $a*b=a*\gamma$ τότε $b=\gamma$ και αν $b*a=\gamma*a$ τότε $b=\gamma$

Απόδειξη: $a*b=a*\gamma \Rightarrow a'*(a*b)=a'*(a*\gamma) \xRightarrow[\text{ιδιότητα } (1)]{\text{προσεταιριστική}} (a'*a)*b=(a'*a)*\gamma$

$\xRightarrow[(3)]{\text{αντίστροφοι}} e*b=e*\gamma \overset{(2)}{\Rightarrow} b=\gamma$.

Θεώρημα: Έστω $(G,*)$ ομάδα και $a,b\in G$. Οι γραμμικές εξισώσεις $a*x=b$ και $y*a=b$ έχουν μοναδικές λύσεις στην G.

Απόδειξη: • Παρατηρούμε ότι $a*(a'*b)\overset{(1)}{=}(a*a')*b\overset{(3)}{=}e*b\overset{(2)}{=}b$

Άρα η εξίσωση $a*x=b$ έχει λύση το $a'*b$. (Ύπαρξη)

• Έστω x_0 μια λύση της $a*x=b \Rightarrow a*x_0=b$ και $a*(a'*b)=b$
$\Rightarrow a*x_0=a*(a'*b) \Rightarrow x_0=a'*b$ (Μοναδικότητα)

Πρόταση: Το ουδέτερο στοιχείο σε μια ομάδα $(G,*)$ είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω e_1, e_2 δύο ουδέτερα στοιχεία της ομάδας G

$$\left.\begin{array}{l} e_1*g=g=g*e_1 \\ e_2*g=g=g*e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1*g=e_2*g \xRightarrow[\text{νόμος διαγραφής}]{\text{δεξιός}} e_1=e_2$$

Πρόταση: Το αντίστροφο οποιουδήποτε στοιχείου a μιας ομάδας G είναι μοναδικό

Απόδειξη: Έστω a', a'' αντίστροφα του στοιχείου a

$$\left.\begin{array}{l} a'*a=e=a*a' \\ a''*a=e=a*a'' \end{array}\right. \Rightarrow \{ a*a'=a*a'' \Rightarrow a'=a''$$

Θεώρημα Έστω $(G,*)$ ομάδα και $a \in G$ τότε $a*G = G$ και $G*a = G$.

Απόδειξη • $a*G = \{a*g \mid g \in G\} \subseteq G$

$a*g \in G$

(* Συμπέτης)

• Έστω $g \in G$ τότε $g = a*(a'*g) \in a*G$ Άρα $a*G = G$

Παραδείγματα Είναι το $(\mathbb{Z},\cdot)$ ομάδα;

(i) $a\cdot(b\cdot\gamma) = (a\cdot b)\cdot\gamma$ που ισχύει η προσεταιριστική.
(ii) $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.
(iii) Έστω $a \in \mathbb{Z}$

$2 \in \mathbb{Z}$ $\quad 2\,\boxed{1/2} = 1 = \boxed{1/2}\cdot 2$ Το 2 δεν έχει αντίστροφο στο $\mathbb{Z}$, αφού το $1/2 \notin \mathbb{Z}$.
Άρα το $(\mathbb{Z},\cdot)$ δεν είναι ομάδα

Είναι το $(\mathbb{R},+)$ ομάδα;

1) $a+(b+\gamma) = (a+b)+\gamma$ ισχύει
2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists e$: $a+\boxed{0} = \boxed{0}+a = a$
(3) Έστω $a \in \mathbb{R}$ τότε $a+(-a) = (-a)+a = 0$ Άρα το $(\mathbb{R},+)$ είναι ομάδα

Είναι το $(\mathbb{R},\cdot)$ ομάδα;

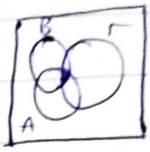
1) $a\cdot(b\cdot\gamma) = (a\cdot b)\cdot\gamma$ που ισχύει
2) $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$
3) Για $a=0$ $\nexists$ αντίστροφος Άρα το $(\mathbb{R},\cdot)$ δεν είναι ομάδα.

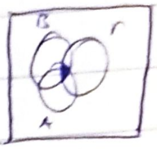
Το $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ είναι ομάδα.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$

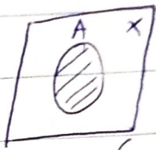
Έστω X σύνολο και $P(x)$ το δυναμοσύνολο του X (δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X). Είναι το $(P(x),\cap)$ ομάδα;

Η τομή υποσυνόλων του X είναι υποσύνολο του X. Άρα η τομή είναι διμελής πράξη στο $P(X)$.





(1) Προσεταιριστική $A\cap(B\cap\Gamma)=(A\cap B)\cap\Gamma$

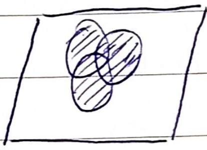


(2) Ουδέτερο στοιχείο $A\cap\boxed{X}=\boxed{X}\cap A=A$

(3) Αντίστροφο. Αν $A\neq X$ το A δεν έχει αντίστροφο. Άρα $(P(X),\cap)$ δεν είναι ομάδα.

Είναι το σύνολο $(P(X),\cup)$ ομάδα;

(1) $A\cup(B\cup\Gamma)=(A\cup B)\cup\Gamma$



(2) $\forall A\subseteq X,\ \exists\ E\subseteq X\ :\ A\cup\boxed{\emptyset}=\boxed{\emptyset}\cup A=A$

(3) $\forall\ A\subseteq X$ θα πρέπει να υπάρχει $A'\subseteq X$ τ.ω. $A'\cup A=\emptyset=A\cup A'$

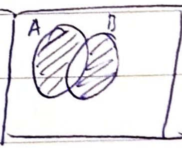
$A\neq\emptyset$ και $A\cup A'=\emptyset$

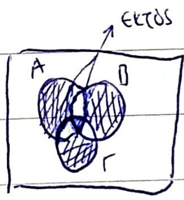
$\Rightarrow\emptyset\neq A\subset A\cup A'=\emptyset$ Άτοπο

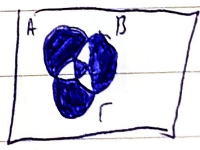
Άρα $(P(X),\cup)$ δεν είναι ομάδ

$\dotplus$

Το σύνολο $(P(X),\oplus)$: $A\oplus B=A\cup B-(A\cap B)$ συμμετρική διαφορά είναι ομάδα;







1) $A\dotplus(B\dotplus\Gamma)=(A\dotplus B)\dotplus\Gamma$

2) $\forall\ A\subseteq X$ $\exists$ ένα σύνολο $\emptyset\subseteq X$ τ.ω. $A\dotplus\emptyset=A=\emptyset\dotplus A$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $\emptyset$ αφού $A\dotplus\emptyset=(A\cup\emptyset)-(A\cap\emptyset)=A-\emptyset=$

(3) Έστω $A\subseteq X$ τότε $A\dotplus A=\emptyset=A\dotplus A$ αφού $A\dotplus A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A$

Το αντίστροφο του A είναι το ίδιο το A. Άρα $(P(X),\dotplus)$ είναι ομάδα.

Είναι το σύνολο $(Q^* = Q - \{0\}, \circ)$ ομάδα;

Όπου $a \circ b = ab/3$

Είναι διμελής πράξη; Έστω $a, b \in Q^* \Rightarrow a, b$ ρητοί κ' διάφοροι του μηδενός. Τότε $a \circ b \in Q^*$. Το $a \circ b = \frac{a \cdot b}{3}$ ρητός κ' διάφορος του μηδενός.

Έστω $a \cdot b = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot b}{3} = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $b = 0$ Άτοπο.

Άρα $a \circ b \neq 0 \Rightarrow a \circ b \in Q^*$. Η πράξη είναι διμελής

(1) Έστω $a, b, \gamma \in Q^*$ τότε: $a \circ (b \circ \gamma) = a \circ \frac{b\gamma}{3} = \frac{a(b\gamma)}{9}$; $(a \circ b) \circ \gamma = \frac{ab}{3} \circ \gamma = \frac{(ab)\gamma}{9}$; $\frac{a(b\gamma)}{9} = \frac{(ab)\gamma}{9}$ άρα ισχύει η προσεταιριστική (στους ρητούς)

(2) Έστω $a \in Q^*$ τότε $3 \in Q^*$: $a \circ \boxed{3} = \boxed{3} \circ a = a$ διότι $a \circ 3 = \frac{3a}{3} = a = 3 \circ a$

Άρα υπάρχει ουδέτερο και είναι το $3 \in Q^*$

(3) Έστω $a \in Q^*$ τότε για $a' = \boxed{9/a}$ έχουμε $a \circ a' = 3 = a' \circ a$

$a \circ \frac{9}{a} = \frac{a \cdot \frac{9}{a}}{3} = 3$. Άρα το αντίστροφο του a είναι το $9/a$

Το σύνολο $(Z_8, +)$ είναι ομάδα; $(Z_m, +)$ $m \in N$

με $Z_8 = \{[a]_8 \mid a \in Z\}$ (8 στοιχεία) με $[a]_8 + [b]_8 = [a+b]_8$

(i) $([a]_8 + [b]_8) + ([\gamma]_8) = [a+b]_8 + [\gamma]_8 = [(a+b)+\gamma]_8 = [a + (b+\gamma)]_8 =$
$= [a]_8 + [b+\gamma]_8 = [a]_8 + ([b]_8 + [\gamma]_8)$, ισχύει.

(ii) ~~Έστω~~ $\forall [a]_8 \in Z_8$ ισχύει: $[a]_8 + [0]_8 = [a]_8 = [0]_8 + [a]_8$

(iii) $\forall [a]_8 \in Z_8$ ισχύει $[a]_8 + [-a]_8 = [0]_8 = [-a]_8 + [a]_8$

Άρα $(Z_8, +)$ είναι ομάδα
$(Z_m, +)$ είναι ομάδα.

Το $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ είναι ομάδα;

(1) ✓

(2) $[a]_8 \cdot [1]_8 = [a]_8$ ✓

(3) $\mathbb{Z}_8 = \{ \underset{\times}{[0]_8}, \underset{\checkmark}{[1]_8}, \underset{\times}{[2]_8}, \underset{\checkmark}{[3]_8}, \underset{\times}{[4]_8}, [5]_8, \underset{\times}{[6]_8}, [7]_8 \}$

↳ ($2x \equiv 1 \bmod 8$ δεν έχει λύση) Άρα το $[2]_8$ δεν έχει αντίστροφο

Άρα δεν είναι ομάδα.